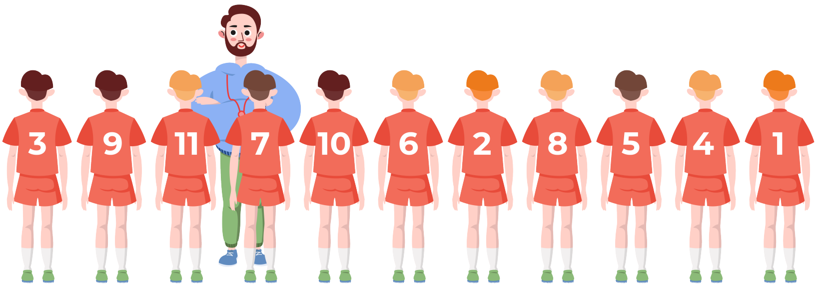
5 класс

Задача 5.1. После футбольного матча тренер построил команду в шеренгу, как показано на рисунке, и скомандовал: «В раздевалку бегут те, у кого номер меньше, чем у любого из соседей». После того, как несколько человек убежало, он повторил свою команду. Тренер продолжал до тех пор, пока не остался один игрок. Какой номер у Игоря, если известно, что после того как он убежал, в шеренге осталось 3 человека? (После каждой команды убегали один или несколько игроков, после чего шеренга смыкалась, и пустых мест между оставшимися игроками не оставалось.)



Ответ: 5.

Решение. Ясно, что после первой команды останутся игроки 9, 11, 10, 6, 8, 5, 4, 1. После второй команды останутся игроки 11, 10, 8, 5, 4. После третьей — 11, 10, 8, 5. После четвёртой — 11, 10, 8. Значит, у Игоря был номер 5. □

Задача 5.2. На урок физкультуры Алина, Богдан, Вика и Гриша пришли в шортах и футболках, причём каждый из этих предметов одежды был синего или красного цвета. У Алины и Богдана футболки были красные, а шорты — разного цвета. У Вики и Гриши футболки были разного цвета, а шорты — синие. Также известно, что у девочек футболки разные по цвету, да и шорты тоже. Кто из детей в какой одежде?

Ответ: Алина — красная футболка и красные шорты, Богдан — красная футболка и синие шорты, Вика — синяя футболка и синие шорты, Гриша — красная футболка и синие шорты.

Решение. У Алины и Вики по условию футболки разные, поэтому у Вики футболка синяя. Тогда у Гриши красная футболка. Значит, синяя футболка только у Вики.

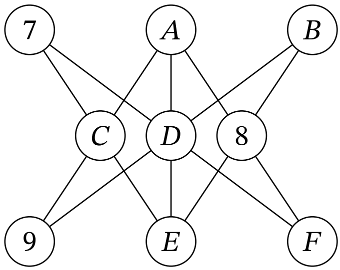
У Алины и Вики по условию шорты разные, поэтому у Алины красные шорты. Тогда у Богдана синие шорты. Значит, красные шорты только у Алины. □

Задача 5.3. К первому сентября Влад купил себе несколько шариковых и гелевых ручек. Он заметил, что если бы все купленные ручки были гелевыми, то он заплатил бы в 4 раза больше, чем вышло у него. А если бы все ручки были шариковыми, то покупка обошлась бы в 2 раза дешевле реальной. Во сколько раз гелевая ручка дороже, чем шариковая?

Ответ: 8.

Решение. Если бы все ручки были гелевыми, то их цена была бы в 4 раза больше реальной цены, что в свою очередь в 2 раза больше, чем если бы все ручки были шариковыми. Значит, гелевые ручки стоят в $4 \cdot 2 = 8$ раз больше шариковых. Следовательно, и одна гелевая ручка в 8 раз дороже, чем одна шариковая. □

Задача 5.4. Расставьте цифры от 1 до 6 (каждую нужно использовать ровно один раз) так, чтобы сумма трёх чисел, расположенных на каждой из 7 прямых, была равна 15. В ответе укажите, какие цифры должны стоять на местах A – F.



(a) Вместо буквы A	**(1)** должна стоять цифра 1
(b) Вместо буквы B	**(2)** должна стоять цифра 2
(c) Вместо буквы C	**(3)** должна стоять цифра 3
(d) Вместо буквы D	**(4)** должна стоять цифра 4
(e) Вместо буквы E	**(5)** должна стоять цифра 5
(f) Вместо буквы F	**(6)** должна стоять цифра 6

Ответ: $A = 4, B = 1, C = 2, D = 5, E = 6, F = 3$.

Решение. По условию A, D, E — различные цифры, не превосходящие 6, сумма которых равна 15. Если эти цифры брать максимально возможными, то их сумма $4 + 5 + 6 = 15$. Значит, A, D, E — это 4, 5, 6 в некотором порядке (если хотя бы одна из цифр не больше 3, то сумма всех трёх цифр не больше $3 + 5 + 6 < 15$).

При этом $A \neq 6$ (иначе $A + C + 9 > 15$) и $D \neq 6$ (иначе $B + D + 9 > 15$). Следовательно, $E = 6$.

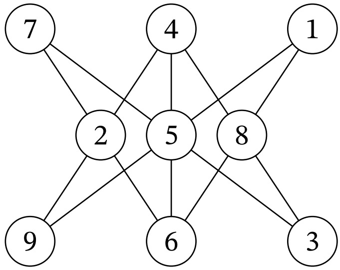
Поскольку $7 + C + E = 15$ и $E = 6$, получаем $C = 2$.

Поскольку $9 + C + A = 15$ и $C = 2$, получаем $A = 4$.

Поскольку $A + 8 + F = 15$ и $A = 4$, получаем $F = 3$.

Поскольку $7 + D + F = 15$ и $F = 3$, получаем $D = 5$.

Поскольку $9 + D + B = 15$ и $D = 5$, получаем $B = 1$.



Легко проверить, что полученная расстановка удовлетворяет всем условиям. □

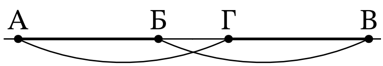
Задача 5.5. Дома Андрея, Бори, Вовы и Глеба расположены в некотором порядке на одной прямой улице. Расстояние между домами Андрея и Бори, как и расстояние между домами Вовы и Глеба, равно 600 м. Чему может равняться в метрах расстояние между домами Андрея и Глеба, если известно, что оно в 3 раза больше, чем расстояние между домами Бори и Вовы? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 900, 1800.

Решение. Для краткости будем дома жителей кратко обозначать первой буквой их имени. А двумя заглавными буквами подряд будем обозначать расстояние между домами соответствующих людей.

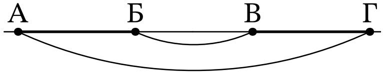
Не умаляя общности, А левее Б (иначе будем смотреть на всё с другой стороны улицы).

Сначала предположим, что В правее Г. Так как А левее Б на 600 м, а Г левее В на 600 м, то АГ равно БВ (если отрезок, соединяющий Б и В, мысленно перенести левее на 600 м, то получится отрезок, соединяющий А и Г). Но по условию они отличаются в 3 раза — противоречие.

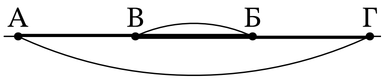


Значит, А левее Б, В левее Г. Поскольку АБ = ВГ, то В и Г не могут одновременно располагаться между А и Б, а также А и Б не могут одновременно располагаться между В и Г. Тогда возможны 4 случая расположения домов.

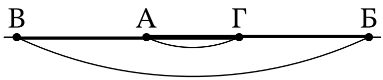
Случай 1. Порядок домов такой: А, Б, В, Г. Поскольку АБ $= 600$, БВ $= x$, ВГ $= 600$, то по условию $600 + x + 600 = 3x$, откуда $x = 600$, тогда АГ $= 1800$.



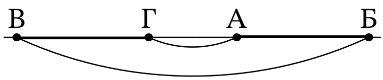
Случай 2. Порядок домов такой: А, В, Б, Г. Пусть БВ $= x$. Поскольку АБ $=$ ВГ $= 600$, то АВ $=$ БГ $= 600 - x$. Тогда по условию $(600 - x) + x + (600 - x) = 3x$, откуда $x = 300$, тогда АГ $= 900$.



Случай 3. Порядок домов такой: В, А, Г, Б. Легко видеть, что АГ не может быть больше БВ, противоречие.



Случай 4. Порядок домов такой: В, Г, А, Б. Легко видеть, что АГ не может быть больше БВ, противоречие.



Значит, возможны только два варианта: 900 и 1800. □

Задача 5.6. Ване на Новый Год подарили три набора конфет. В наборах три вида конфет: леденцы, шоколадные и мармеладные. Общее количество леденцов во всех трёх наборах равно общему количеству шоколадных конфет во всех трёх наборах, а также общему количеству мармеладных конфет во всех трёх наборах. В первом наборе шоколадных и мармеладных поровну, а леденцов на 7 больше. Во втором наборе леденцов и шоколадных одинаково, а мармеладных на 15 меньше. Сколько конфет в третьем наборе, если известно, что леденцов там нет?

Ответ: 29.

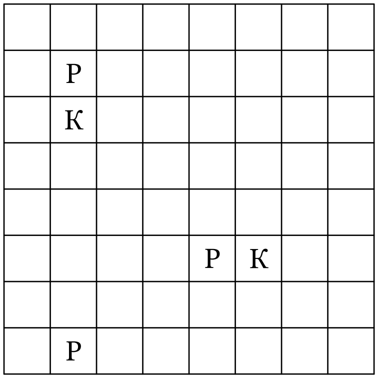
Решение. Леденцов больше, чем мармеладных конфет, в первом наборе на 7, а во втором на 15. Поскольку их суммарно во всех наборах поровну, а в третьем наборе леденцов 0, то мармеладных конфет там $7 + 15 = 22$.

Аналогично, леденцов больше, чем шоколадных конфет, в первом наборе на 7, а во втором на 0. Поскольку их суммарно во всех наборах поровну, а в третьем наборе леденцов 0, то шоколадных конфет там 7.

Тогда конфет в третьем наборе $22 + 7 + 0 = 29$. □

Задача 5.7. Мышонок Джерри решил подарить коту Тому на День Рождения пирог в виде квадрата 8×8. В три куска, отмеченные буквой «Р», он положил рыбу, в два куска, отмеченные буквой «К», положил колбасу, а ещё в один кусок добавил и то, и другое, но такой кусок не отметил (все остальные куски — без начинки). Также Джерри сообщил Тому, что в любом квадрате 6×6 есть хотя бы 2 куска с рыбой, а в любом квадрате 3×3 — не более одного куска с колбасой.

Какое наименьшее количество кусков пирога надо съесть Тому, чтобы среди них гарантированно оказался кусок с рыбой и колбасой?



Ответ: 5.

Решение. Кусок с рыбой и колбасой назовём *заветным.*

По условию в любом квадрате 6×6 есть хотя бы 2 куска с рыбой. В любом таком квадрате хотя бы один известный кусок с рыбой уже содержится; рассмотрим те квадраты, которые содержат только 1 известный кусок рыбы (все они прилегают к правой границе пирога). Можно увидеть, что у них есть общий прямоугольник 4×6 (серый на рис. 1). Значит, именно в нём и содержится заветный кусок.

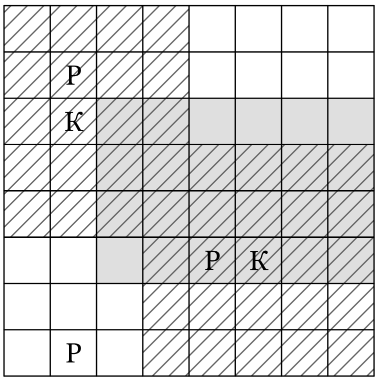
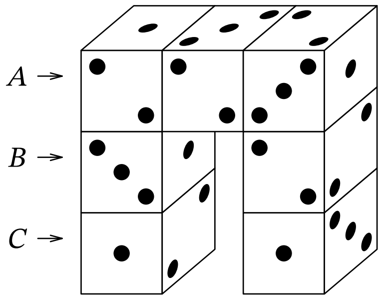


Рис. 1: к решению задачи 5.7

Далее, по условию в любом квадрате 3×3 не более 1 куска с колбасой. Значит, в любом таком квадрате, который уже содержит известный кусок колбасы, заветного куска не будет. Такие квадраты закрывают области 5×5 с центрами в каждом куске колбасы (заштрихованы на рисунке).

Остаётся ровно 5 клеток (серых, но не заштрихованных). Несложно проверить, что каждый из этих 5 случаев удовлетворяет условию задачи. Если Том съест не более 4 кусков пирога, то одна из перечисленных выше пяти клеток точно окажется не тронута, а в ней может находиться заветный кусок. А если Том съест 5 кусков в этих клетках, то среди них точно будет заветный. □

Задача 5.8. Есть 7 абсолютно одинаковых кубиков, у которых отмечены на одной грани 3 точки, на двух гранях по 2 точки, на остальных по 1. Из этих кубиков склеили фигуру в виде буквы «П», изображённую на рисунке, причём количество точек на любых двух соприкасающихся гранях одинаково.



Что находится на трёх левых гранях A, B и C?

Ответ: A — 2, B — 2, C — 3.

Решение. Для полного решения этой задачи необходимо не только понимание того, сколько точек расположено на гранях кубика и какие именно из них соседние. Также важно разобраться в том, по каким именно диагоналям направлены точки на гранях кубика.

Рассмотрим правый средний кубик (над и под которым есть ещё кубики). На его верхней грани, как и на его нижней грани, не могут стоять 3 точки (иначе у верхнего или у нижнего кубика было бы хотя бы две грани по 3 точки). Значит, грань с 3 точками — одна из двух оставшихся (которые не видны и ни с кем не соприкасаются). Тогда в нашем кубике напротив грани с 3 точками находится грань с 2 точками, одна из четырёх оставшихся граней имеет 2 точки, а остальные три — по 1 точке.

Рассмотрим средний верхний кубик. На верхней его грани 3 точки, на ближней — 2 точки. Ясно, что тогда на нижней грани этого кубика 2 точки, а на левой — 1 точка (рис. 2).

Рассмотрим средний верхний кубик и левый средний. Они абсолютно одинаковые, поэтому их можно совместить в пространстве («наложить» друг на друга). При этом грани с тремя точками должны совместиться; с учётом направлений этих точек понятно, что это можно сделать только двумя способами; один из этих способов невозможен, так как иначе видимая грань с 2 точками совместится с видимой гранью с 1 точкой. Значит, положение левого среднего кубика определено однозначно, и на его левой грани B, а также на задней грани по 2 точки. Тогда на его верхней и нижней грани по 1 точке.

У верхнего кубика верхняя, передняя и нижняя грань определены. Правая тоже — на ней

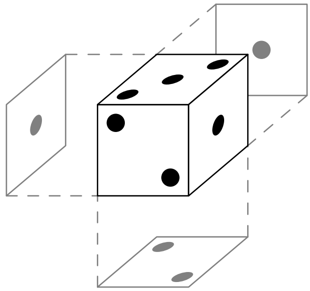


Рис. 2: к решению задачи 5.8; чёрным изображены три «настоящие» грани кубика; серым — вынесенные изображения трёх остальных граней.

1 точка, т. к. на левой грани верхнего среднего кубика 1 точка. Тогда на грани A обязательно 2 точки, а на задней грани — 3 точки.

У нижнего кубика на передней и верхней грани по 1 точке, а на правой 2. Поскольку напротив грани с 3 точками не может находиться грань с 1 точкой, получаем, что на грани C 3 точки.

Итак, на грани A находятся 2 точки, на грани B — 2 точки, на грани C — 3 точки. Несложно убедиться, что все 7 кубиков можно расположить так, как на рисунке, чтобы все условия задачи выполнялись. □