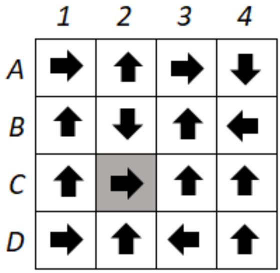
6 класс

Задача 6.1. В квадрате 4×4 в отмеченной серым фоном клетке стоит фишка. За одно действие фишка перемещается в соседнюю по стороне клетку, по направлению стрелочки, на которой стоит. Также после каждого перемещения стрелочка в клетке, где только что была фишка, меняется на противоположную. С какой клетки фишка выйдет за границу квадрата? В ответе укажите строку и столбец этой клетки.



(a) Строка A
(b) Строка B
(c) Строка C
(d) Строка D

(1) столбец 1
(2) столбец 2
(3) столбец 3
(4) столбец 4

Ответ: Строка A, столбец 2.

Решение. Легко видеть, что фишка пойдёт по маршруту

$$C2-C3-B3-A3-A4-B4-B3-C3-D3-D2-C2-C1-B1-A1-A2,$$

с клетки $A2$ она и выйдет с доски. □

Задача 6.2. В соревновании по бегу участвовали пять спортсменов: A, B, C, D и E. Было сделано два прогноза, в каком порядке они финишируют.

- Первый прогноз: A — первый, B — второй, C — третий, D — четвёртый, E — пятый.
- Второй прогноз: C — первый, E — второй, A — третий, B — четвёртый, D — пятый.

Оказалось, что первом прогнозе было верно предсказано ровно про троих спортсменов, а во втором — ровно про двоих. Кто какое место занял в забеге?

Ответ: C — первый, B — второй, A — третий, D — четвёртый, E — пятый.

Решение. В первом прогнозе верно предсказано ровно про троих спортсменов, т. е. неверно предсказано про двоих. Значит, места, на которых эти двое финишировали, надо поменять друг с другом.

Также во втором прогнозе про каждого из пяти спортсменов предсказано не то же место, что и в первом прогнозе. Следовательно, про верно предсказанных троих спортсменов в первом прогнозе предсказано неверно во втором прогнозе. Тогда, поскольку во втором прогнозе верно предсказано про двоих, ими должны быть в точности те двое, про которых неверно предсказано в первом прогнозе.

Начнём перебирать, у каких спортсменов в первом прогнозе надо поменять места друг с другом. Во втором прогнозе у этих же двоих места должны совпасть с поменянными местами в первом.

Если это спортсмены A и B, то, поменяв их места, получим, что во втором прогнозе A должен быть вторым, а B — первым. Но это не так.

Если это спортсмены A и C, то, поменяв их места, убедимся, что во втором прогнозе A является третьим, а C — вторым. Тогда места троих остальных спортсменов B, D, E верно предсказаны в первом прогнозе: B — второй, D — четвёртый, E — пятый. Этот вариант удовлетворяет условиям задачи.

Если это спортсмены A и D, то, поменяв их места, получим, что во втором прогнозе A должен быть четвёртым, а D — первым. Но это не так.

Аналогично перебирая остальные возможные пары A и E, B и C, B и D, B и E, C и D, C и E, D и E, несложно убедиться в том, что A и C — единственно возможная пара, про которую неверно предсказано в первом прогнозе. $\square$

Другое решение. Отметим, что для каждого спортсмена прогнозы дают разные результаты, то есть в оба в сумме они могли угадать не более одного раза. Так как про всех пятерых прогнозы в сумме угадали пять раз, то про каждого спортсмена они угадали ровно по одному разу. Кроме того, это означает, что про каждое место прогнозы также угадали ровно по одному разу.

Значит, если бы первый прогноз угадал про первое место A, то второй бы не угадал про C (так как его прочили на первое место); тогда первый бы угадал про C.

Аналогично, если бы первый угадал про B, то первый угадал бы про E и, аналогично, про D.

Рассуждая так и далее, становится ясно, что про A и C первый прогноз одновременно угадал про обоих или не угадал ни про одного; аналогично с B, E и D. Так как всего первый прогноз угадал про троих спортсменов, то про B, D и E он угадал, а про A и C — нет. Со вторым прогнозом, соответственно, всё наоборот. $\square$

Задача 6.3. Три купца: Фома, Ерёма и Юлий встретились в Новгороде. Если Фома отдаст Ерёме 70 золотых монет, то у Ерёмы и Юлия будет поровну денег. Если Фома отдаст Ерёме 40 золотых монет, то у Фомы и Юлия будет поровну денег. Сколько золотых монет должен отдать Фома Ерёме, чтобы у них двоих стало поровну денег?

Ответ: 55.

Решение. Из первого условия следует, что у Юлия на 70 монет больше, чем у Ерёмы. Из второго условия следует, что у Фомы на 40 монет больше, чем у Юлия. Значит, у Фомы на $40 + 70 = 110$ монет больше, чем у Ерёмы. Чтобы денег у них стало поровну, Фома должен отдать Ерёме половину этой разницы, равную $\frac{110}{2} = 55$ монетам. □

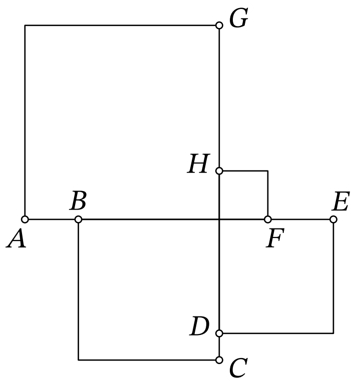
Задача 6.4. В прибрежной деревне 7 человек рыбачат каждый день, 8 человек рыбачат через день, 3 человека рыбачат раз в три дня, а остальные не рыбачат вовсе. Вчера рыбачили 12 человек, сегодня рыбачат 10 человек. Сколько людей будет рыбачить завтра?

Ответ: 15.

Решение. Посчитаем, сколько раз суммарно рыбачили за вчера и сегодня. 7 человек, которые рыбачат каждый день, рыбачили по 2 раза, т. е. суммарно рыбачили 14 раз. 8 человек, которые рыбачат через день, рыбачили ровно 1 раз, т. е. суммарно рыбачили 8 раз. Тогда суммарно эти 15 человек за вчера и сегодня рыбачили $14 + 8 = 22$ раза.

По условию за вчера и сегодня рыбачили $12 + 10 = 22$ раза. Следовательно, рыбаков, которые рыбачат раз в три дня, вчера и сегодня не было, и они все придут рыбачить завтра. Также завтра придут 7 человек, рыбачащих каждый день, а ещё придут $12-7 = 5$ рыбаков, рыбачащих через день. Значит, завтра придут рыбачить $3 + 7 + 5 = 15$ человек. □

Задача 6.5. На рисунке изображено 4 квадрата. Известно, что длина отрезка AB равна 11, длина отрезка FE равна 13, длина отрезка CD равна 5. Чему равна длина отрезка GH?



Ответ: 29.

Решение. Сторона самого большого квадрата (с вершиной A) больше стороны второго по величине квадрата (с вершиной C) на длину отрезка AB, равную 11. Аналогично, сторона второго по величине квадрата больше стороны третьего по величине квадрата (с вершиной E) на длину отрезка CD, равную 5. А его сторона больше стороны самого маленького квадрата на длину отрезка EF, равную 13. Итого, сторона большого квадрата больше стороны самого маленького квадрата на длину отрезка GH, равную $11 + 5 + 13 = 29$. □

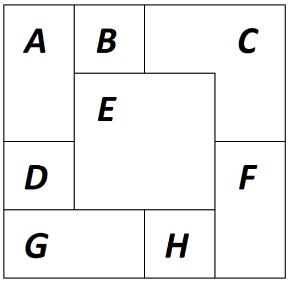
Задача 6.6. На фотографирование класса пришли 4 девочки и 8 мальчиков. Дети по двое подходят к фотографу и делают совместное фото. Среди какого наименьшего количества фотографий обязательно есть либо фотография двух мальчиков, либо фотография двух девочек, либо две фотографии с одними и теми же детьми?

Ответ: 33.

Решение. Пусть в некоторый момент нет ни фотографии двух мальчиков, ни фотографии двух девочек, ни двух фотографий с одними и теми же детьми. Тогда на каждой фотографии присутствуют мальчик и девочка, причём на разных фотографиях — разные пары. Но всевозможных пар, состоящих из мальчика и девочки, существует $4 \cdot 8 = 32$, и каждая из этих пар может быть запечатлена не более чем на одной фотографии. Значит, среди любых 33 фотографий обязательно найдётся либо фотография с людьми одного пола, либо две фотографии с одной и той же парой людей.

При этом не более 32 фотографий может не хватить: на них могут быть запечатлены разные пары, состоящие из мальчика и девочки. □

Задача 6.7. Восемь бумажных квадратов 2×2 последовательно выкладывали на стол, пока не получился большой квадрат 4×4. Последним на стол положили квадрат E. На рисунке изображено, как видны квадраты: квадрат E видно полностью, остальные квадраты видно частично. Какой квадрат положили на стол третьим по счёту?



Ответ: G.

Решение. Ясно, что разные квадраты выкладывали на разное место (иначе положенный последним полностью покрывал бы положенный ранее, но мы видим хотя бы по одной клетке от каждого квадрата).

Положения квадратов A, C, G и F можно определить сразу, так как они содержат угловые клетки.

Поскольку F не покрывает видимую клетку квадрата H, H был положен позже F. (Кроме того, теперь однозначно определяется положение квадрата H.)

Поскольку G покрывает клетку левее видимой клетки квадрата H, G был положен позже H.

Поскольку G не покрывает видимую клетку квадрата D, D был положен позже G.

Поскольку A покрывает клетку выше видимой клетки квадрата D, A был положен позже D. (И положение квадрата D теперь тоже определено.)

Поскольку A не покрывает видимую клетку квадрата B, B был положен позже A.

Поскольку C покрывает клетку правее видимой клетки квадрата B, C был положен позже B.

Квадрат E по условию положили последним.

Значит, квадраты выкладывались в порядке $F–H–G–D–A–B–C–E$, и третьим из них был G. $\square$

Задача 6.8. Натуральное число n назовём *хорошим*, если 2020 при делении на n даёт остаток 22. Сколько существует хороших чисел?

Ответ: 10.

Решение. В последующем решении выражение вида a^k — число a в степени k — это число a, умноженное на себя k раз. Также будем считать $a^0 = 1$. Например, $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$, а $2^0 = 1$.

Поскольку 2020 при делении на n даёт остаток 22, то $2020 - 22 = 1998$ делится на n, а также $n > 22$ (поскольку остаток от деления меньше делителя). Значит, надо найти количество делителей числа 1998, которые больше 22. Очевидно, любое такое число является хорошим.

Разложим 1998 на простые множители: $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$. Любой его делитель, делящийся на 37, больше 22, поэтому он является хорошим числом. Такие делители представляются в виде $2^a \cdot 3^b \cdot 37$, где a может принимать одно из значений $0, 1$ (2 варианта), b может принимать одно из значений $0, 1, 2, 3$ (4 варианта). Значит, таких делителей $2 \cdot 4 = 8$.

Теперь посчитаем количество делителей, не делящихся на 37. Такие делители представляются в виде $2^c \cdot 3^d$, где c может принимать одно из значений $0, 1$, а d может принимать одно из значений $0, 1, 2, 3$. Если $d < 3$, то такой делитель не превосходит $2 \cdot 3^2 < 22$, поэтому не является хорошим числом. Если $d = 3$, то такой делитель не меньше $3^3 > 22$, поэтому является хорошим числом. Таких делителей всего два: 3^3 и $2 \cdot 3^3$.

Итого хороших чисел $8 + 2 = 10$. $\square$

Замечание. Зная, что $1998 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$, можно просто выписать все 16 делителей этого числа и убедиться, что ровно 10 из них превосходят 22:

$$1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 37, 54, 74, 111, 222, 333, 666, 999, 1998\,.$$